Théorème de Banach-Alaoglu et minimisation d'une fonctionnelle convexe

[40 dév) et [3]

Thm : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-ev normé séparable. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E'.
Il existe une extractrice φ et $T \in E'$ tels que $\forall x \in E,\ T_{\varphi(n)}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Tx$.

Soit (x_n) une suite dense dans E.
$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |T_n x_i| \leq M\|x_i\|$, où $M = \sup \|T_n\|_{E'}$
donc $(T_n x_i)$ est bornée, dont on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$, de limite Tx_i.
Par procédé d'extraction diagonale, il existe φ ($\varphi(n) = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$) extractrice telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ T_{\varphi(n)} x_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Tx_i$
Soit $x \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $i \in \mathbb{N}$ tq $\|x - x_i\| \leq \varepsilon$.

$$|T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(q)}x| \leq |T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(p)}x_i| + |T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i| + |T_{\varphi(q)}x_i - T_{\varphi(q)}x|$$
$$\leq 2M\varepsilon + |T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i|$$

et pour p, q assez grands, $|T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i| \leq \varepsilon$ car $(T_{\varphi(n)}x_i)$ est convergente.
Donc $|T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(q)}x| \leq (2M+1)\varepsilon$, i.e. $(T_{\varphi(n)}x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, donc convergente, de limite Tx.
T est linéaire car limite simple de fonctions linéaires
De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ |T_{\varphi(n)}x| \leq M\|x\|$ donc $\|T\| \leq M$, $T \in E'$.

Cor : Soit $J : H \to \mathbb{R}$ continue, convexe, coercive $\left(\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} J(x) = +\infty\right)$, H Hilbert séparable.
$\exists x_0 \in H,\ J(x_0) = \inf\limits_H J$

- Soit (x_n) minimisante. Si elle n'était pas bornée, alors on aurait φ extractrice telle que $\|x_{\varphi(n)}\| \to +\infty$, mais alors $J(x_{\varphi(n)}) \to +\infty = \inf J$, absurde.
Donc $(\langle x_n, \cdot\rangle) \in (H')^{\mathbb{N}}$ est bornée, donc, par ce qui précède, $\exists \varphi,\ \forall y \in H,\ \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x_0, y\rangle$
avec $x_0 \in H$ par le théorème de Riesz.

- Soit $\alpha > \inf\limits_H J$. Posons $K = \{x \in H,\ J(x) \leq \alpha\}$.
Puisque $(x_{\varphi(n)})$ est minimisante, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ x_{\varphi(n)} \in K$, donc $K \neq \emptyset$
J est continue / convexe donc K est fermée / convexe.
Soit p_K la projection orthogonale sur K. $\forall n \geq N,\ \langle x_0 - p_K(x_0), x_{\varphi(n)} - p_K(x_0)\rangle \leq 0$.
A la limite, $\|x_0 - p_K x_0\|^2 \leq 0$, donc $x_0 = p_K(x_0)$, i.e. $x_0 \in K$.
Donc $\forall \alpha > \inf\limits_H J,\ J(x_0) \leq \alpha$, i.e. $J(x_0) = \inf\limits_H J$.